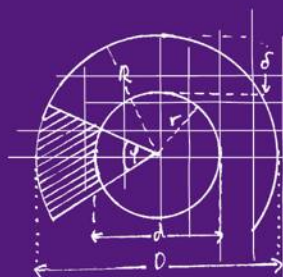


НАГЛЯДНЫЙ СПРАВОЧНИК ДЛЯ ПОДГОТОВКИ

К **ОГЭ**
И
ЕГЭ



$$A = \theta a^2$$
$$d = a\sqrt{3}$$
$$y = a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Н.Н. УДАЛОВА



МАТЕМАТИКА

- ✓ ВСЕ ТЕМЫ ШКОЛЬНОГО КУРСА
- ✓ ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ЗАДАНИЯ
- ✓ ОТВЕТЫ И КОММЕНТАРИИ



УДК 373:51
ББК 22.1я721
У28

Удалова, Наталья Николаевна.
У28 Математика / Н. Н. Удалова. — Москва : Эксмо, 2019. — 304 с. —
(Наглядный справочник для подготовки к ОГЭ и ЕГЭ).

ISBN 978-5-04-093003-6

Справочник содержит теоретические сведения за весь школьный курс математики, а также практические задания с ответами и пояснениями. Весь материал изложен в наглядной и доступной форме, что способствует быстрому усвоению большого количества информации.

Издание окажет помощь старшеклассникам при подготовке к ОГЭ и ЕГЭ, урокам, различным формам текущего и промежуточного контроля.

**УДК 373:51
ББК 22.1я721**

ISBN 978-5-04-093003-6

© Удалова Н.Н., 2018
© Оформление. ООО «Издательство «Эксмо», 2019

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
 АЛГЕБРА	5
Числа, корни и степени.....	5
Основы тригонометрии	20
Логарифмы	30
Преобразование выражений	35
 УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА.....	57
Уравнения	57
Неравенства	91
 ФУНКЦИИ.....	117
Определение и график функции	117
Элементарное исследование функции.....	125
Основные элементарные функции	133
 НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА	147
Производная	147
Исследование функций	161
Первообразная и интеграл.....	177
 ГЕОМЕТРИЯ	187
Планиметрия	187
Прямые и плоскости в пространстве	204
Многогранники.....	216
Тела и поверхности вращения	230
Измерения геометрических фигур	239
Координаты и векторы	267
 ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ, СТАТИСТИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ	286
Элементы комбинаторики	286
Элементы статистики.....	291
Элементы теории вероятностей.....	294
 ЗАДАЧИ С ЭКОНОМИЧЕСКИМ СОДЕРЖАНИЕМ	299

АЛГЕБРА



ЧИСЛА, КОРНИ И СТЕПЕНИ

В данном разделе рассматриваются действия с десятичными и обыкновенными дробями, рациональными, иррациональными и действительными числами. Представлены свойства степеней с натуральным, целым, рациональным и действительным показателем.

1 2 3
4 5
6 7 8 9

ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА

Натуральные числа (1; 2; 3; 4; 5...), числа, им противоположные (–1; –2; –3; –4; –5...), и число нуль образуют множество **целых чисел**.

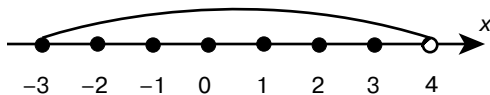
Множество натуральных (от лат. *naturalis* — природа) чисел имеет специальное обозначение — N ; множество целых (нем. *Zahl* — число) чисел — Z .



Практические задания

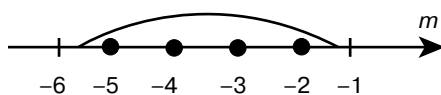
1 Найдите количество целых чисел, удовлетворяющих условию:

а) $x \in [-3; 4)$.



Ответ: 7.

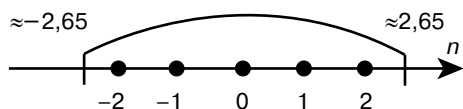
б) $-5,6 < m \leq -1,3$.



Ответ: 4.

2

Множество чисел задано формулой $x_n = n^2 - 5$, где $n \in \mathbb{Z}$. Сколько чисел из данного множества не больше 2?



$$n^2 - 5 \leq 2, n^2 \leq 7, -\sqrt{7} \leq n \leq \sqrt{7}.$$

Ответ: 5.

СТЕПЕНЬ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Степенью числа a с натуральным показателем n , большим 1, называется произведение n множителей, каждый из которых равен a .

Например:

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81;$$

$$0,2^6 = 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 0,000\,064.$$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ множителей}}$$

a — основание степени
 n — показатель степени

Таблица квадратов

Десятки	Единицы									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Свойства степеней

$$a^1 = a$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \text{ где } a \neq 0$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$a^x \cdot b^x = (ab)^x$$

$$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x, \text{ где } b \neq 0$$

! При чётном показателе степени

$$a, b > 0$$

$$(-a)^n = b \quad -a^n = -b$$

$$(-3)^4 = 81 \quad -3^4 = -81$$

Таблица степеней

a^n	Значения n					
	1	2	3	4	5	6
2^n	2	4	8	16	32	64
3^n	3	9	27	81	243	729
4^n	4	16	64	256	1024	4096
5^n	5	25	125	625	3125	15 625
6^n	6	36	216	1296	7776	46 656
7^n	7	49	343	2401	16 807	
8^n	8	64	512	4096	32 768	
9^n	9	81	729	6561	59 049	

a^n	Значения n			
	7	8	9	10
2^n	128	256	512	1024
3^n	2187	6561	19 683	59 049

! Если в основании степени отрицательное число

$a^n > 0$, если n — чётное число (2; 4; 6...):

$$(-3)^4 = 81.$$

$a^n < 0$, если n — нечётное число (1; 3; 5...):

$$(-2)^5 = -32.$$



Практические задания

3 Вычислите.

$$a) \frac{8^2}{2^5} = \frac{(2^3)^2}{2^5} = \frac{2^{3 \cdot 2}}{2^5} = \frac{2^6}{2^5} = 2^{6-5} = 2^1 = 2;$$

$$b) \frac{6^{25} \cdot 9^{11}}{27^{15} \cdot 4^{12}} = \frac{(2 \cdot 3)^{25} \cdot (3^2)^{11}}{(3^3)^{15} \cdot (2^2)^{12}} = \frac{2^{25} \cdot 3^{25} \cdot 3^{22}}{3^{45} \cdot 2^{24}} = \frac{2^{25} \cdot (3^{25} \cdot 3^{22})}{2^{24} \cdot 3^{45}} = \frac{2^{25} \cdot 3^{47}}{2^{24} \cdot 3^{45}} =$$

$$= 2^{25-24} \cdot 3^{47-45} = 2^1 \cdot 3^2 = 18.$$

Ответ: а) 2; б) 18.

ДРОБИ

Число вида $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, называют **обыкновенной дробью**.

$\frac{m}{n}$ ← числитель
 n ← знаменатель

Любое число, знаменатель дробной части которого выражается единицей с одним или несколькими нулями, можно представить в виде **десятичной дроби**.

Например:

$$\frac{3}{10} = 0,3; \quad \frac{3}{100} = 0,03;$$

$$2\frac{3}{1000} = 2,003; \quad \frac{-7}{100} = -0,07.$$

Основное свойство дроби

Если числитель и знаменатель дроби умножить (разделить) на одно и то же число, отличное от 0, то получится дробь, равная данной.

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}, \text{ где } c \neq 0$$

Например:

$$\frac{0,35}{0,4} = \frac{0,35 \cdot 100}{0,4 \cdot 100} = \frac{35}{40} = \frac{7}{8};$$

$$0,3 : 0,27 = \frac{0,3}{0,27} = \frac{0,3 \cdot 100}{0,27 \cdot 100} = \frac{30}{27} =$$

$$= \frac{30 : 3}{27 : 3} = \frac{10}{9} = 1\frac{1}{9}.$$

Действия с обыкновенными дробями

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

Выделение целой части из неправильной дроби:

$$\frac{17}{7} = 2\frac{3}{7} \quad - \frac{17}{14} \left| \frac{7}{2} \right.$$

Перевод обыкновенной дроби в десятичную:

$$\begin{aligned} \frac{17}{8} &= 2,125; & - \frac{17}{16} \left| \frac{8}{2,125} \right. \\ & & - \frac{10}{8} \\ \frac{3}{25} &= \frac{3 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{12}{100} = 0,12; & - \frac{16}{20} \\ & & - \frac{16}{40} \\ \frac{3}{8} &= \frac{3 \cdot 125}{8 \cdot 125} = \frac{375}{1000} = 0,375. & - \frac{40}{40} \\ & & 0 \end{aligned}$$

Перевод смешанного числа в неправильную дробь:

$$3\frac{5}{9} = \frac{3 \cdot 9 + 5}{9} = \frac{32}{9}.$$

Чтобы **сложить (вычесть) смешанные числа**, надо:

1) привести дробные части этих чисел к наименьшему общему знаменателю;

2) отдельно выполнить сложение (вычитание) целых частей и отдельно — дробных.

• Если при сложении дробных частей получилась неправильная дробь, выделить целую часть из этой дроби и прибавить её к полученной целой части.

• Если дробная часть уменьшаемого меньше дробной части вычитаемого, превратить её в неправильную дробь, уменьшив на единицу целую часть.

Чтобы выполнить **умножение смешанных чисел**, надо:

1) записать смешанные части в виде неправильных дробей;

2) найти произведение числителей и произведение знаменателей этих дробей;

3) первое произведение записать числителем, а второе — знаменателем.

Чтобы выполнить **деление смешанных чисел**, надо:

1) записать смешанные части в виде неправильных дробей;

2) делимое умножить на число, обратное делителю.



Практические задания

4 Вычислите.

$$a) 2\frac{7^{\sqrt{2}}}{9} + 3\frac{5^{\sqrt{3}}}{6} = 2\frac{14}{18} + 3\frac{15}{18} = 5\frac{29}{18} = 6\frac{11}{18};$$

$$\text{б) } 9\frac{7^{\sqrt{2}}}{15} - 2\frac{5^{\sqrt{5}}}{6} = 9\frac{14}{30} - 2\frac{25}{30} = 8\frac{44}{30} - 2\frac{25}{30} = 6\frac{19}{30};$$

$$\text{в) } 7 - 3\frac{2}{11} = 6\frac{11}{11} - 3\frac{2}{11} = 3\frac{9}{11}; \quad \text{г) } 3\frac{5}{6} - 2 = 1\frac{5}{6}.$$

Ответ: а) $6\frac{11}{18}$; б) $6\frac{19}{30}$; в) $3\frac{9}{11}$; г) $1\frac{5}{6}$.

5 Вычислите.

$$\text{а) } 2\frac{1}{3} \cdot 4\frac{2}{7} = \frac{7}{3} \cdot \frac{30}{7} = \frac{7 \cdot 30}{3 \cdot 7} = 10; \quad \text{б) } 15 \cdot 2\frac{3}{5} = 15 \cdot 2 + 15 \cdot \frac{3}{5} = 30 + \frac{15 \cdot 3}{5} = 30 + 9 = 39.$$

Ответ: а) 10; б) 39.

6 Вычислите.

$$\text{а) } 2\frac{3}{5} : 1\frac{6}{7} = \frac{13}{5} : \frac{13}{7} = \frac{13}{5} \cdot \frac{7}{13} = \frac{7}{5} = 1\frac{2}{5}; \quad \text{б) } \frac{3}{7} : 14 = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{14} = \frac{3}{98};$$

$$\text{в) } 2 : 1\frac{3}{5} = 2 : \frac{8}{5} = \frac{2}{1} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4} = 1,25; \quad \text{г) } 2\frac{8}{9} : \frac{13}{27} = \frac{26}{9} : \frac{13}{27} = \frac{26}{9} \cdot \frac{27}{13} = \frac{26 \cdot 27}{9 \cdot 13} = 6.$$

Ответ: а) $1\frac{2}{5}$; б) $\frac{3}{98}$; в) 1,25; г) 6.

7 Вычислите.

$$\text{а) } \frac{2\frac{1}{4}}{3\frac{3}{5}} = \frac{2\frac{1}{4} \cdot 20}{3\frac{3}{5} \cdot 20} = \frac{2 \cdot 20 + \frac{1}{4} \cdot 20}{3 \cdot 20 + \frac{3}{5} \cdot 20} = \frac{40 + 5}{60 + 12} = \frac{45}{72} = \frac{5}{8} = 0,625;$$

$$\text{б) } \frac{10}{1\frac{13}{15}} = \frac{10 \cdot 15}{1\frac{13}{15} \cdot 15} = \frac{150}{1 \cdot 15 + \frac{13}{15} \cdot 15} = \frac{150}{15 + 13} = \frac{150}{28} = \frac{75}{14} = 5\frac{5}{14}.$$

Ответ: а) 0,625; б) $5\frac{5}{14}$.

Действия с десятичными дробями

Чтобы **сложить (вычесть) десятичные дроби**, надо:

- 1) уравнивать в этих дробях количество знаков после запятой;
- 2) записать их друг под другом так, чтобы запятая была записана под запятой;
- 3) выполнить сложение (вычитание), не обращая внимания на запятую;
- 4) поставить в ответе запятую под запятой.

Чтобы **перемножить две десятичные дроби**, надо:

- 1) выполнить умножение, не обращая внимания на запятые;

- 2) отделить запятой столько цифр справа, сколько их стоит после запятой в обоих множителях вместе.

Чтобы **разделить десятичную дробь на натуральное число**, надо:

- 1) разделить дробь на это число, не обращая внимания на запятую;
- 2) поставить в частном запятую, когда кончится деление целой части.

Чтобы **разделить число на десятичную дробь**, надо:

- 1) в делимом и делителе перенести запятую вправо на столько цифр, сколько их после запятой в делителе;
- 2) выполнить деление на натуральное число.



Практические задания

8 Вычислите.

$$\text{а) } 2,35 + 11,7 = 14,05; \quad \begin{array}{r} 11,70 \\ + 2,35 \\ \hline 14,05 \end{array}$$

$$\text{б) } 12 - 10,346 = 1,654; \quad \begin{array}{r} 12,000 \\ - 10,346 \\ \hline 1,654 \end{array}$$

$$\text{в) } 16,77 + 12,23 = 29,00 = 29. \quad \begin{array}{r} 16,77 \\ + 12,23 \\ \hline 29,00 \end{array}$$

Ответ: а) 14,05; б) 1,654; в) 29.

9 Вычислите.

$$3,25 \cdot 2,8 = 9,100 = 9,1. \quad \begin{array}{r} \times 3,25 \\ 2,8 \\ \hline 2600 \\ + 650 \\ \hline 9,100 \end{array}$$

Ответ: 9,1.

10 Вычислите.

$$\text{а) } 183,24 : 9 = 20,36; \quad \begin{array}{r} 183,24 \quad | 9 \\ - 18 \\ \hline 32 \\ - 27 \\ \hline 54 \\ - 54 \\ \hline 0 \end{array}$$

б) $70,15 : 23 = 3,05$;

в) $36 : 25 = 1,44$.

$$\begin{array}{r} \text{б) } \begin{array}{r} 70,15 \\ - 69 \\ \hline 115 \\ - 115 \\ \hline 0 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{в) } \begin{array}{r} 36 \\ - 25 \\ \hline 110 \\ - 100 \\ \hline 100 \\ - 100 \\ \hline 0 \end{array} \end{array}$$

Ответ: а) 20,36; б) 3,05; в) 1,44.**11** Вычислите.

а) $25,6 : 0,08 = 2560 : 8 = 320$;

б) $12,35 : 2,5 = 123,5 : 25 = 4,94$;

в) $36 : 0,125 = 36\,000 : 125 = 288$;

г) $0,8 : 0,25 = \frac{0,8}{0,25} = \frac{0,8 \cdot 100}{0,25 \cdot 100} = 3\frac{1}{5} = 3,2$.

Ответ: а) 320; б) 4,94; в) 288; г) 3,2.

ПРОЦЕНТЫ

Процентом (лат. *per cent* — на сотню) называется одна сотая часть величины.

$$1\% = \frac{1}{100}$$

$$100\% = 1$$

$$3\% = 0,03 \quad (3 : 100)$$

$$0,2 = 20\% \quad (0,2 \cdot 100)$$



Практические задания

12

Шуба во время распродажи стоит 77 000 рублей. Скидка составляет 30%. Какова была стоимость шубы до распродажи?

Решение:

77 000 руб.	$100\% - 30\% = 70\%$
x руб.	100%

$$\frac{77\,000}{x} = \frac{70}{100}; \quad x = \frac{77\,000 \cdot 100}{70} = 110\,000 \text{ (руб.)} — \text{цена шубы до распродажи.}$$

Ответ: 110 000.

- 13** Магазин закупает чашки по оптовой цене 120 рублей за штуку и продаёт с наценкой 30%. Какое наибольшее число таких чашек можно купить в этом магазине на 900 рублей?

Решение:

120 руб.	100%
x руб.	$100\% + 30\% = 130\%$

1) $\frac{120}{x} = \frac{100}{130}$; $x = \frac{120 \cdot 130}{100} = 156$ (руб.) — цена одной чашки с наценкой;

2) $900 : 156 = 5, \dots \Rightarrow 5$ чашек можно купить.

Ответ: 5.

- 14** Первый сплав содержит 20% меди, второй — 10% меди. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 200 кг, содержащий 14% меди. Найдите массу первого сплава.

Решение:

Сплав	Масса сплава	Масса меди
1	x	$0,2x$
2	$200 - x$	$0,1(200 - x)$
полученный	200	$0,2x + 0,1(200 - x)$ $200 \cdot 0,14 = 28$

$20\% = 0,2$; $10\% = 0,1$;

$14\% = 0,14$;

$0,2x + 0,1(200 - x) = 28$;

$0,2x + (20 - 0,1x) = 28$;

$0,1x = 8$;

$x = 80$ (кг) — масса первого сплава.

Ответ: 80.

15

Билет на поезд до Москвы стоил 2500 рублей, после подорожания стоимость билета составила 3000 рублей. На сколько процентов повысилась цена билета?

Решение:

2500 руб.	100%
3000 руб.	$x\%$

$$1) \frac{2500}{3000} = \frac{100}{x}; \quad x = \frac{3000 \cdot 100}{2500} = 120\%;$$

$$2) 120\% - 100\% = 20\% \text{ — повышение цены.}$$

Ответ: 20%.

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Целые и дробные числа (положительные и отрицательные) образуют множество **рациональных чисел**.

Множество рациональных (от лат. *ratio* — деление) чисел обозначается Q .

Любое рациональное число можно представить в виде обыкновенной дроби $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Получается, что числитель (m) может иметь знак, а знаменатель (n) должен быть положительным числом. Например:

$$а) 5 = \frac{5}{1}; \quad б) 1,5 = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}.$$

Любое рациональное число можно записать в виде десятичной дроби либо в виде периодической дроби.

Например:

$$а) 3 = 3,0;$$

$$б) \frac{3}{11} = 0,(27).$$

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 11} \\ \underline{0} 2727... \\ \underline{30} \\ \underline{22} \\ \underline{80} \\ \underline{77} \\ \underline{30} \\ \underline{22} \\ \underline{80} \\ \underline{77} \\ 3 \end{array}$$

■ Действия
с отрицательными
и положительными числами

Чтобы **сложить два отрицательных числа**, надо:

1) сложить их модули;

2) поставить перед полученным числом знак «-».

$$-(-a) = a$$

Например:

$$-2 + (-7) = -(2 + 7) = -9.$$

Чтобы **сложить два числа с разными знаками**, надо:

- 1) из большего модуля слагаемых вычесть меньший;
- 2) поставить перед полученным числом знак того слагаемого, модуль которого больше.

Например:

$$а) -5 + 15 = +(15 - 5) = 10;$$

$$б) -17 + 11 = -(17 - 11) = -6.$$

Чтобы из данного числа вычесть другое, надо к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому.

Например:

$$а) -2 - (-5) = -2 + 5 = 3;$$

$$б) 8 - 9 = 8 + (-9) = -1.$$

Чтобы **перемножить (разделить) два числа с разными знаками**, надо перемножить (разделить) модули этих чисел и поставить перед полученным числом знак «-».

Например:

$$а) 10 \cdot (-3,5) = -35;$$

$$б) -0,25 \cdot 4 = -1;$$

$$в) -7 : 2 = -3,5.$$

Чтобы **перемножить (разделить) два отрицательных числа**, надо перемножить (разделить) их модули.

Например:

$$а) -7 \cdot (-10) = +70 = 70;$$

$$б) -42 : (-7) = +6 = 6.$$

СТЕПЕНЬ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \neq 0$$

$$a^0 = 1, a \neq 0$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n, a \neq 0, b \neq 0$$



Практические задания

16 Вычислите.

$$а) 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25};$$

$$б) (-4)^{-3} = \frac{1}{(-4)^3} = -\frac{1}{64};$$

$$\text{в)} (-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{16}; \quad \text{г)} -3^{-6} = -\frac{1}{3^6} = -\frac{1}{729};$$

$$\text{д)} \frac{9^{-2} \cdot 36}{16^{-2} \cdot 27} = \frac{(3^2)^{-2} \cdot (3^2 \cdot 2^2)}{(2^4)^{-2} \cdot 3^3} = \frac{3^{-4} \cdot 3^2 \cdot 2^2}{2^{-8} \cdot 3^3} = \frac{3^{-2} \cdot 2^2}{3^3 \cdot 2^{-8}} = \frac{2^8 \cdot 2^2}{3^3 \cdot 3^2} = \frac{2^{10}}{3^5} = \frac{1024}{243}.$$

Ответ: а) $\frac{1}{25}$; б) $-\frac{1}{64}$; в) $\frac{1}{16}$; г) $-\frac{1}{729}$; д) $\frac{1024}{243}$.

КОРЕНЬ СТЕПЕНИ $n > 1$ И ЕГО СВОЙСТВА

Корнем n -й степени ($n \in \mathbb{N}, n > 1$) из действительного числа a называется такое действительное число b , n -я степень которого равна a .



$\sqrt[n]{a}$ не существует,
если $a < 0$ и n — чётное число.

Если n — чётное число, то
 $\sqrt[n]{x^n} = |x|$.

Свойства корней n -й степени

Для любых

$$a \geq 0, b \geq 0, n \geq 2, m \geq 2:$$

$$\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \quad b \neq 0$$

$$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$$



Практические задания

17 Вычислите.

а) $\sqrt{625} = 25$, т. к. $25^2 = 625$;

б) $\sqrt[3]{64} = 4$, т. к. $4^3 = 64$;

в) $\sqrt[3]{0,000\,027} = 0,03$, т. к. $(0,03)^3 = 0,000\,027$.

Ответ: а) 25; б) 4; в) 0,03.

18 Вычислите.

$$\text{а) } \sqrt{(3-\sqrt{2})^2} = |3-\sqrt{2}| = 3-\sqrt{2}, \text{ т. к. } 3 > \sqrt{2};$$

$$\text{б) } \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2} = |\sqrt{3}-\sqrt{5}| = \sqrt{5}-\sqrt{3}, \text{ т. к. } \sqrt{5} > \sqrt{3};$$

$$\text{в) } \sqrt[3]{(3-\sqrt{2})^3} = 3-\sqrt{2};$$

$$\begin{aligned} \text{г) } \sqrt{7-4\sqrt{3}} &= \sqrt{4+3-4\sqrt{3}} = \sqrt{2^2-2\cdot 2\cdot \sqrt{3}+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = |2-\sqrt{3}| = \\ &= 2-\sqrt{3}, \text{ т. к. } 2 > \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Ответ: а) $3-\sqrt{2}$; б) $\sqrt{5}-\sqrt{3}$; в) $3-\sqrt{2}$; г) $2-\sqrt{3}$.

19 Вычислите.

$$\text{а) } \sqrt{7\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{66} = \sqrt{\frac{22}{3}} \cdot \sqrt{66} = \sqrt{22 \cdot 22} = 22;$$

$$\text{б) } \sqrt{34^2-16^2} = \sqrt{(34-16)(34+16)} = \sqrt{18 \cdot 50} = \sqrt{9 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 25} = 3 \cdot 2 \cdot 5 = 30.$$

Ответ: а) 22; б) 30.

СТЕПЕНЬ С РАЦИОНАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ И ЕЁ СВОЙСТВА

Пусть $a > 0$, $\frac{m}{n}$ — рациональное число ($n \geq 2$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$), тогда

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Например:

$$\text{а) } 7^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{7^2} = \sqrt[3]{49};$$

$$\text{б) } 3^{\frac{-4}{5}} = \sqrt[5]{3^{-4}} = \sqrt[5]{\frac{1}{3^4}} = \sqrt[5]{\frac{1}{81}}.$$

Все свойства степени с целым показателем верны для степени с любым рациональным показателем и положительным основанием.

$a > 1$, r — рациональное число

Если $r > 0$, то $a^r > 1$

Если $r < 0$, то $0 < a^r < 1$

$0 < a > 1$, r, t — рациональные числа

Если $r > t$, то $a^r < a^t$

$a > 1$, r, t — рациональные числа

Если $r > t$, то $a^r > a^t$

Например:

а) $3^{\frac{1}{4}} > 3^{\frac{1}{5}}$, т. к. $3 > 1$ и $\frac{1}{4} > \frac{1}{5}$;

б) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{3}{8}} > \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$, т. к. $0 < \frac{2}{5} < 1$ и $\frac{3}{8} < \frac{1}{2}$;

в) $(3,7)^{-2,5} < 1$, т. к. $3,7 > 1$, $-2,5 < 0$.



Практические задания

20 Вычислите.

$$81^{\frac{1}{7}} \cdot 27^{\frac{1}{7}} = (81 \cdot 27)^{\frac{1}{7}} = (3^4 \cdot 3^3)^{\frac{1}{7}} = (3^7)^{\frac{1}{7}} = 3^1 = 3.$$

Ответ: 3.

СВОЙСТВА СТЕПЕНИ С ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

При любом $x \in \mathbb{R}$ и любом $a > 0$ степень a^x является положительным действительным числом: $a^x > 0$ при $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

Все свойства степени с рациональным показателем верны для степени с действительным показателем.



Практические задания

21 Вычислите.

$$a) \left(9^{\sqrt{26}-5}\right)^{\sqrt{26}+5} = 9^{(\sqrt{26}-5)(\sqrt{26}+5)} = 9^{(\sqrt{26})^2 - 5^2} = 9^{26-25} = 9;$$

$$б) 7^{5\sqrt{5}-1} \cdot 7^{1-3\sqrt{5}} : 7^{2\sqrt{5}-1} = 7^{(5\sqrt{5}-1)+(1-3\sqrt{5})-(2\sqrt{5}-1)} = 7^{5\sqrt{5}-1+1-3\sqrt{5}-2\sqrt{5}+1} = 7^1 = 7;$$

$$в) \frac{5^{\sqrt{7}} \cdot 6^{\sqrt{7}}}{30^{\sqrt{7}-2}} = \frac{(5 \cdot 6)^{\sqrt{7}}}{30^{\sqrt{7}-2}} = \frac{30^{\sqrt{7}}}{30^{\sqrt{7}-2}} = 30^{\sqrt{7}-(\sqrt{7}-2)} = 30^{\sqrt{7}-\sqrt{7}+2} = 30^2 = 900.$$

Ответ: а) 9; б) 7; в) 900.

22 Вычислите.

$$а) \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3^{\frac{1}{4}}+2^{\frac{1}{4}}} = \frac{3^{\frac{1}{2}}-2^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{4}}+2^{\frac{1}{4}}} = \frac{\left(3^{\frac{1}{4}}\right)^2 - \left(2^{\frac{1}{4}}\right)^2}{3^{\frac{1}{4}}+2^{\frac{1}{4}}} = \frac{\left(3^{\frac{1}{4}}+2^{\frac{1}{4}}\right) \cdot \left(3^{\frac{1}{4}}-2^{\frac{1}{4}}\right)}{3^{\frac{1}{4}}+2^{\frac{1}{4}}} = 3^{\frac{1}{4}}-2^{\frac{1}{4}} =$$

$$= \sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{2};$$

$$б) \frac{2^{-\sqrt{7}}}{0,5^{\sqrt{7}+1}} = \frac{2^{-\sqrt{7}}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{7}+1}} = \frac{2^{-\sqrt{7}}}{(2^{-1})^{\sqrt{7}+1}} = \frac{2^{-\sqrt{7}}}{2^{-\sqrt{7}-1}} = 2^{-\sqrt{7}-(-\sqrt{7}-1)} = 2^{-\sqrt{7}+\sqrt{7}+1} = 2^1 = 2;$$

$$в) \frac{2^{2\sqrt{3}}}{0,25^{2-\sqrt{3}}} = \frac{2^{2\sqrt{3}}}{\left(\frac{1}{4}\right)^{2-\sqrt{3}}} = \frac{2^{2\sqrt{3}}}{(2^{-2})^{2-\sqrt{3}}} = \frac{2^{2\sqrt{3}}}{2^{-2(2-\sqrt{3})}} = \frac{2^{2\sqrt{3}}}{2^{-4+2\sqrt{3}}} = 2^{2\sqrt{3}-(-4+2\sqrt{3})} =$$

$$= 2^{2\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}} = 2^4 = 16;$$

$$г) \frac{\sqrt{6}}{9^{\frac{1}{5}} \cdot 4^{\frac{1}{4}}} = \frac{(2 \cdot 3)^{\frac{1}{2}}}{(3^2)^{\frac{1}{5}} \cdot (2^2)^{\frac{1}{4}}} = \frac{2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{2}{5}} \cdot 2^{\frac{1}{2}}} = 3^{\frac{1}{2}-\frac{2}{5}} = 3^{\frac{5}{10}-\frac{4}{10}} = 3^{\frac{1}{10}} = \sqrt[10]{3};$$

$$д) 9^{\sqrt{5}} \cdot (0,25)^{-\sqrt{5}} : 6^{2\sqrt{5}} = 9^{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-\sqrt{5}} : 6^{2\sqrt{5}} = 9^{\sqrt{5}} \cdot 4^{\sqrt{5}} : (6^2)^{\sqrt{5}} =$$

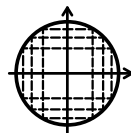
$$= (9 \cdot 4)^{\sqrt{5}} : 36^{\sqrt{5}} = 36^{\sqrt{5}} : 36^{\sqrt{5}} = 1.$$

Ответ: а) $\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{2}$; б) 2; в) 16; г) $\sqrt[10]{3}$; д) 1.



ОСНОВЫ ТРИГОНОМЕТРИИ

Раздел посвящён тригонометрическим функциям, радианной и градусной мере угла. Рассматриваются основные тригонометрические формулы и их применение при упрощении выражений.



СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС, КОТАНГЕНС ПРОИЗВОЛЬНОГО УГЛА

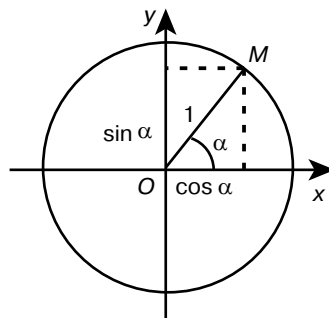
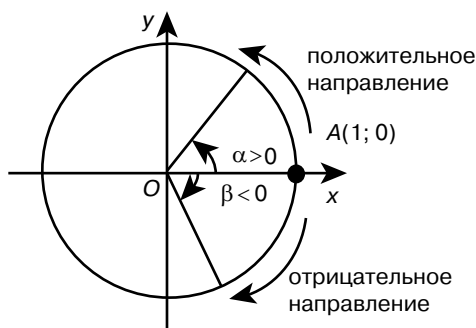
Единицей окружностью в тригонометрии называют окружность радиуса 1 с центром в начале системы координат xOy .

Синусом угла α ($\sin \alpha$) называется ордината точки, полученной поворотом точки $(1; 0)$ вокруг начала координат на угол α .

Косинусом угла α ($\cos \alpha$) называется абсцисса точки, полученной поворотом точки $(1; 0)$ вокруг начала координат на угол α .

Тангенсом угла α ($\operatorname{tg} \alpha$) называется отношение синуса угла к его косинусу.

Котангенсом угла α ($\operatorname{ctg} \alpha$) называется отношение косинуса угла к его синусу.



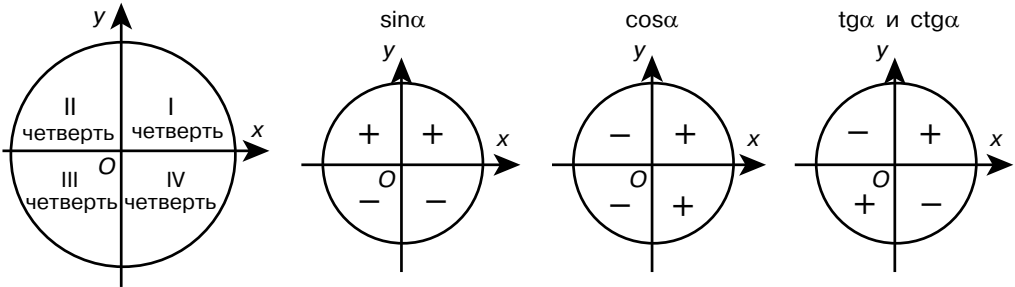
$$\sin \alpha = y$$

$$\cos \alpha = x$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

■ Знаки синуса, косинуса, тангенса и котангенса



Практические задания

23 Определите знаки синуса, косинуса и тангенса.

а) $\alpha = 240^\circ$;

$\alpha = 240^\circ$ — III четверть $\Rightarrow \sin \alpha < 0$,

$\cos \alpha < 0$, $\operatorname{tg} \alpha > 0$;

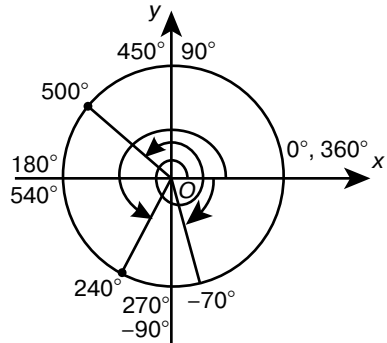
б) $\beta = 500^\circ$;

$\beta = 500^\circ$ — II четверть $\Rightarrow \sin \beta > 0$,

$\cos \beta < 0$, $\operatorname{tg} \beta < 0$;

в) $\gamma = -70^\circ$;

$\gamma = -70^\circ$ — IV четверть $\Rightarrow \sin \gamma < 0$, $\cos \gamma > 0$, $\operatorname{tg} \gamma < 0$.



Ответ: а) $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha < 0$, $\operatorname{tg} \alpha > 0$; б) $\sin \beta > 0$, $\cos \beta < 0$, $\operatorname{tg} \beta < 0$;

в) $\sin \gamma < 0$, $\cos \gamma > 0$, $\operatorname{tg} \gamma < 0$.

РАДИАННАЯ МЕРА УГЛА

Центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности, называется **углом в один радиан**.